EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Per la teoria sulle equazioni differenziali si rimanda al Cap. 6 del libro di Analisi Matematica AB paragrafi 6.1, 6.2, 6.4.

Risoluzione di EQ.^{NI} DIFFERENZIALI LINEARI

1) EQ.^{NI} DIFFERENZIALI LINEARI del 1° ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x)$$

Equazione omogenea : $y'(x) + a(x)\,y(x) = 0$

Equazione completa : $y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x)$

- EQ.^{NE} OMOGENEA $\quad y'(x) + a(x)\cdot y(x) = 0$

Si moltiplicano primo e secondo membro per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ (con $A(x)$ da determinarsi) ottenendo

$$e^{A(x)}\cdot y'(x) + a(x)\,e^{A(x)}\cdot y(x) = 0.$$

Si noti che, essendo $e^{A(x)} \neq 0$ sempre, le due equazioni sono equivalenti. Se scegliamo come funzione $A(x)$ una primitiva della funzione $a(x)$ (cioè $A'(x) = a(x)$) il primo membro diventa la derivata del prodotto $e^{A(x)}\cdot y(x)$. Allora l'eq.^{ne} iniziale è equivalente a

$$D(e^{A(x)}\cdot y(x)) = 0$$

(adesso $A(x)$ è una precisa funzione scelta da noi)

da cui si deduce (corollario del Teorema di Lagrange per funzioni reali di una va   oile reale) che

$$e^{A(x)} \cdot y(x) = c \qquad (c \in \mathbb{R}) .$$

Allora l' INTEGRALE GENERALE dell' eq.ne $y'(x)+a(x)y(x)=$ (cioè la formula che fornisce tutte le sol.ni) è

$$\boxed{y(x) = c e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}} .$$

ESEMPIO. Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) + \operatorname{sen} x \, y(x) = 0$.

Moltiplichiamo primo e secondo membro per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ (con $A(x)$ che sceglieremo dopo) ottenendo un'eq.ne equivalente a quella iniziale

$$e^{A(x)} \cdot y'(x) + \operatorname{sen} x \, e^{A(x)} y(x) = 0 .$$

Scegliamo $A(x)$ tale che $A'(x) = \operatorname{sen} x$, ad esempio $A(x) = -\cos x$ $\left(\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c \right)$. Con questa scelta abbiamo

$$e^{-\cos x} y'(x) + \operatorname{sen} x \, e^{-\cos x} \cdot y(x) = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$D(e^{-\cos x} \cdot y(x)) = 0 .$$

Allora $e^{-\cos x} \cdot y(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ e quindi tutte le sol.ni dell'eq.ne sono date da

$$y(x) = c e^{\cos x} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

• EQ.^{NE} COMPLETA $y'(x)+a(x)\,y(x)=f(x)$

Come nel caso dell' equazione omogenea procediamo moltiplicando entrambi i membri per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ ottenendo

$$e^{A(x)}y'(x)+a(x)e^{A(x)}y(x)=f(x)e^{A(x)}$$

Di nuovo scegliamo come funzione $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ $(A'(x)=a(x))$ in modo che il primo membro risulti la derivata di $e^{A(x)}\cdot y(x)$. Allora l'eq.^{ne} iniziale è equivalente a

$$D(e^{A(x)}\cdot y(x))=f(x)\cdot e^{A(x)}$$

(dove $A(x)$ è la funzione che abbiamo scelto noi).

Siamo allora ricondotti al calcolo dell'integrale indefinit. di $f(x)\cdot e^{A(x)}$ perchè $e^{A(x)}\cdot y(x)$ varia tra tutte le primitive della funzione $f(x)\cdot e^{A(x)}$. Allora

$$e^{A(x)}\cdot y(x)=\int f(x)e^{A(x)}dx$$ ← contiene una costante arbitraria $c\in\mathbb{R}$

e l'integrale generale dell'equazione $y'(x)+a(x)y(x)=f(x)$ si ottiene esplicitando $y(x)$ (cioè moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$):

$$y(x)=e^{-A(x)}\cdot\int f(x)e^{A(x)}dx.$$

ESEMPI * Determinate tutte le soluzioni dell' equazione differenziale $y'(x)-3x^2y(x)=x^2$.

Moltiplichiamo primo e secondo membro per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ (con $A(x)$ che sceglieremo dopo) ottenendo un'equazione equivalente a quella iniziale:

$$e^{A(x)}y'(x)-3x^2e^{A(x)}y(x)=x^2e^{A(x)}.$$

Scegliamo $A(x)$ tale che $A'(x)=-3x^2$, ad esempio $A(x)=-x^3$ $\left(\int(-3x^2)\,dx=-x^3+c\right)$ in modo che l'eq.^{ne} diventi

$$D(e^{-x^3}\cdot y(x))=x^2e^{-x^3}.$$

Siamo allora ricondotti a risolvere l'integrale indefinito $\int x^2e^{-x^3}dx$ per trovare tutte le primitive del 2° membro:

$$\int x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int -3x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

Allora

$$e^{-x^3}\cdot y(x)=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c \qquad (c\in\mathbb{R})$$

e tutte le sol.^{ni} dell'equazione data sono

$$y(x)=c\,e^{x^3}-\frac{1}{3} \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

OSSERVAZIONE. Si noti che le funzioni ce^{x^3} $(c\in\mathbb{R})$ costituiscono tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} omogenea associata alla nostra eq.^{ne} $(y'(x)-3x^2y(x)=0)$, mentre $\bar{y}(x)=-\frac{1}{3}$ è una soluzione dell'equazione completa. Il fatto che le soluzioni si possano trovare tutte conoscendo tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} omogenea associata e una soluzione dell'eq.^{ne} completa e sommandole è una proprietà che vale per tutti i tipi di equazioni differenziali lineari di qualunque ordine.

* Determinate tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} differenziale

$$y'(x) - \operatorname{sen} x\, y(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x\, e^{\cos x}$$

Moltiplichiamo primo e secondo membro per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ (con $A(x)$ che sceglieremo dopo) ottenendo un'eq.^{ne} differenziale equivalente a quella data

$$e^{A(x)} \cdot y'(x) - \operatorname{sen} x\, e^{A(x)} y(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x\, e^{\cos x} \cdot e^{A(x)}$$

Scegliamo come funzione $A(x)$ una primitiva di $(-\operatorname{sen} x)$, ad esempio $A(x) = \cos x$ $\left(\int (-\operatorname{sen} x)\, dx = \cos x + c \right)$ in modo che l'eq.^{ne} diventi

$$D\left(e^{\cos x} \cdot y(x)\right) = 3 \operatorname{sen} x \cos x\, e^{2\cos x}.$$

Siamo allora ricondotti a risolvere l'integrale indefinito

$$\int 3 \operatorname{sen} x \cos x\, e^{2\cos x}\, dx = -\frac{1}{2} \int 3\cos x \left(-2 \operatorname{sen} x\, e^{2\cos x}\right) dx =$$

$$\underset{\text{integrando per parti}}{=} -\frac{1}{2}\left[e^{2\cos x} \cdot 3\cos x + \int e^{2\cos x} \cdot 3 \operatorname{sen} x\, dx \right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\cos x\, e^{2\cos x} + \frac{3}{4}\int e^{2\cos x}(-2\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\cos x\, e^{2\cos x} + \frac{3}{4} e^{2\cos x} + c = \frac{3}{2} e^{2\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Allora

$$e^{\cos x} \cdot y(x) = \frac{3}{2} e^{2\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

e tutte le soluzioni dell'equazione iniziale sono date da

$$y(x) = \underbrace{c\, e^{-\cos x}}_{\substack{\text{sol.}^{ni}\text{ dell'eq.}^{ne}\text{ omog.} \\ y'(x) - \operatorname{sen} x\, y(x) = 0}} + \underbrace{\frac{3}{2} e^{\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)}_{\text{sol.}^{ne}\text{ dell'eq.}^{ne}\text{ completa}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

• PROBLEMA di CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x)+a(x)y(x)=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Si deve trovare l'UNICA soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'(x)+a(x)y(x)=f(x)$ che verifica la condizione $y(x_0)=y_0$, cioè che passa per il punto (x_0,y_0)

ESEMPIO Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)-\frac{2x}{1+x^2}y(x)=3x+3x^3 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

1° passo: trovare tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} differenziale

Moltiplichiamo primo e secondo membro per una funzione del tipo $e^{A(x)}$ ottenendo l'eq.^{ne} differenziale

$$e^{A(x)}\cdot y'(x)-\frac{2x}{1+x^2}e^{A(x)}y(x)=(3x+3x^3)e^{A(x)}.$$

Scegliamo $A(x)$ tale che $A'(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$, ad esempio

$A(x)=-\log(1+x^2)$ $\quad\left(\int-\frac{2x}{1+x^2}dx=-\log|1+x^2|+c=-\log(1+x^2)+c\right)$

in modo che l'eq.^{ne} diventi

$$D(e^{-\log(1+x^2)}\cdot y(x))=D\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot y(x)\right)=(\overset{3x(1+x^2)}{3x+3x^3})\frac{1}{1+x^2},$$

ossia $D\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot y(x)\right)=3x$.

Allora $\quad \frac{1}{1+x^2}\cdot y(x)=\int 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2+c \quad (c\in\mathbb{R})$

e tutte le sol.^{ni} dell'eq.^{ne} iniziale sono date da

$$y(x)=c(1+x^2)+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^4 \quad (c\in\mathbb{R}).$$

2° passo: $\left.\begin{array}{l} y(1)=2c+3 \\ y(1)=1 \end{array}\right\}$ $\quad 2c+3=1 \quad c=-1$

SOL.^{NE} $\boxed{y(x)=\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2-1}$

2) EQ.^{NI} DIFFERENZIALI LINEARI del 1° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y'(x) + a\,y(x) = f(x) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Equazione omogenea: $y'(x) + a\,y(x) = 0$

Equazione completa: $y'(x) + a\,y(x) = f(x)$

• EQ.^{NE} OMOGENEA $\quad y'(x) + a\,y(x) = 0$

Si considera l'<u>equazione caratteristica</u> $t + a = 0$ la cui soluzione è $t = -a$. L'eq.^{ne} caratteristica si ottiene sostituendo a $y(x)$ e $y'(x)$ la variabile t elevata al grado della derivata corrispondente: $y'(x) \leftrightarrow t^1 = t$

$y(x) \leftrightarrow t^0 = 1$.

Allora una soluzione dell'equazione differenziale, detta SOLUZIONE FONDAMENTALE, è data da $y_1(x) = e^{-ax}$ e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono al variare di una costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$ considerando

$$y(x) = c\,e^{-ax} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

• EQ.^{NE} COMPLETA $y'(x)+a\,y(x)=f(x)$

1° passo: trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ($y(x)=ce^{-ax}$, $c\in\mathbb{R}$)

2° passo: trovare una soluzione $\bar{y}(x)$ dell'equazione completa (detta soluzione particolare)

Allora tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} $y'(x)+a\,y(x)=f(x)$ si ottengono sommando le soluzioni dell'eq.^{ne} omogenea con la soluzione particolare

$$y(x)=ce^{-ax}+\bar{y}(x) \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

Come si trova la soluzione particolare $\bar{y}(x)$?

Ci sono vari casi a seconda della funzione $f(x)$ che compare a 2° membro.

• $f(x)=P_m(x)=$ polinomio di grado m

$\rightarrow$ $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado m se nell'equazione compare $y(x)$ (cioè $a\neq 0$)

$\rightarrow$ $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado $(m+1)$ se nell'equazione non compare $y(x)$ (cioè $a=0$)

ESEMPIO Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x)+3y(x)=3x^2-7x+2$

1° passo: eq.^{ne} omogenea $y'(x)+3y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t+3=0$

$t=-3$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea: $y(x)=ce^{-3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

<u>2° passo</u>: $f(x) = 3x^2 - 7x + 2 \implies \bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$

dobbiamo determinare per quali valori di a, b, c la funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'eq.^{ne}, cioè $\bar{y}'(x) + 3\bar{y}(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Calcolato $\bar{y}'(x) = 2ax + b$, sostituiamo nell'eq.^{ne} ottenendo

$$\underbrace{2ax + b}_{\bar{y}'(x)} + \underbrace{3ax^2 + 3bx + 3c}_{3\bar{y}(x)} = 3x^2 - 7x + 2,$$

cioè $3ax^2 + (2a+3b)x + (b+3c) = 3x^2 - 7x + 2$.

Due polinomi (dello stesso grado) sono uguali se e solo se coincidono tutti i coefficienti: otteniamo allora il sistema

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + 3b = -7 \\ b + 3c = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ 2 + 3b = -7 \\ \dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ -3 + 3c = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 5/3 \end{cases}$$

e la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ (è l'unico polinomio di 2° grado che è soluzione dell'eq.^{ne}).

Concludendo tutte le soluzioni dell'equazione assegnata $y'(x) + 3y(x) = 3x^2 - 7x + 2$ sono date da

$$y(x) = ce^{-3x} + x^2 - 3x + 5/3 \quad (c \in \mathbb{R})$$

(le sol.^{ni} sono infinite).

- $f(x) = \text{costante} \cdot e^{\alpha x}$

$\to \bar{y}(x) = k \cdot e^{\alpha x}$ se α non è la soluzione dell'equazione caratteristica (cioè $\alpha \neq -a$)

$\to \bar{y}(x) = k x e^{\alpha x}$ se α è la soluzione dell'equazione caratteristica (cioè $\alpha = -a$).

ESEMPI * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x)-2y(x)=3e^x$.

1° passo: eq.^{ne} omogenea $y'(x)-2y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t-2=0$ $t=2$

sol.^{ni} dell'eq.^{ne} omogenea $y(x)=ce^{2x}$ $(c\in\mathbb{R})$

2° passo: $f(x)=3e^x$ $\alpha=1$ non è la sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt. $(t=2)$

$\Rightarrow \bar{y}(x)=ke^x$

Dobbiamo determinare per quale valore di k la funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione, cioè $\bar{y}'(x)-2\bar{y}(x)=3e^x$.

Calcolato $\bar{y}'(x)=ke^x$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$ke^x-2ke^x=3e^x$

$-ke^x=3e^x$ $\Rightarrow$ $k=-3$.

La soluzione particolare allora è $\bar{y}(x)=-3e^x$ e tutte le soluzioni dell'equazione $y'(x)-2y(x)=3e^x$ sono date da

$$y(x)=ce^{2x}-3e^x \quad (c\in\mathbb{R})$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x)-4y(x)=2e^{4x}$.

1° passo: eq.^{ne} omogenea $y'(x)-4y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t-4=0$

$\Rightarrow t=4$ soluzioni dell'eq.^{ne} omogenea $y(x)=ce^{4x}$ $(c\in\mathbb{R})$

2° passo: $f(x)=2e^{4x}$ $\alpha=4$ è la sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratteristica

$\Rightarrow \bar{y}(x)=kxe^{4x}$.

Dobbiamo determinare per quale valore di k la funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'eq.^{ne}, cioè $\bar{y}'(x)-4\bar{y}(x)=2e^{4x}$.

Calcolato $\bar{y}'(x) = ke^{4x} + 4kxe^{4x}$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$ke^{4x} + 4\cancel{k}xe^{4x} - 4\cancel{k}xe^{4x} = 2e^{4x}$$

$$ke^{4x} = 2e^{4x} \Rightarrow k = 2.$$

La soluzione particolare è $\bar{y}(x) = 2xe^{4x}$ e tutte le soluzioni dell'equazione $y'(x) - 4y(x) = 2e^{4x}$ sono date da

$$y(x) = ce^{4x} + 2xe^{4x} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

• $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ $\qquad P_m(x)$ = polinomio di grado m

$\rightarrow \bar{y}(x) = Q_m(x)\, e^{\alpha x}$ $\qquad$ se α non è la soluzione dell'equazione caratteristica (cioè $\alpha \neq -a$)

$Q_m(x)$ è un polinomio di grado m

$\rightarrow \bar{y}(x) \quad x \cdot Q_m(x)\, e^{\alpha x}$ $\qquad$ se α è la soluzione dell'equazione caratteristica (cioè $\alpha = -a$)

ESEMPIO. Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) + 2y(x) = 3xe^{3x}$

1° passo: eq.ne omogenea $\qquad y'(x) + 2y(x) = 0$

eq.ne caratt. $\qquad t + 2 = 0 \quad t = -2$

sol.ni $\qquad y(x) = ce^{-2x} \quad (c \in \mathbb{R})$

2° passo $f(x) = 3xe^{3x}$ $\qquad \alpha = 3$ non è la soluzione dell'eq.ne caratt. $\Rightarrow \bar{y}(x) = (ax+b)e^{3x}$

Dobbiamo determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $\bar{y}(x)$ è sol.ne dell'eq.ne. Calcolato $\bar{y}'(x) = ae^{3x} + 3(ax+b)e^{3x}$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$a\cancel{e^{3x}}+3(ax+b)\cancel{e^{3x}}+2(ax+b)\cancel{e^{3x}}=3x\cancel{e^{3x}}$$

$$5ax+a+5b=3x.$$

Siamo ricondotti al sistema $\begin{cases}5a=3\\ a+5b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{3}{5}\\ 5b=-a\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{3}{5}\\ b=-\frac{3}{25}\end{cases}$.

Allora la soluzione particolare è

$\bar{y}(x)=\left(\frac{3}{5}x-\frac{3}{25}\right)e^{3x}$ e tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} sono date da

$$y(x)=ce^{-2x}+\left(\frac{3}{5}x-\frac{3}{25}\right)e^{3x}\qquad (c\in\mathbb{R}).$$

- $f(x)=\alpha\, \mathrm{sen}(Kx)+\beta\cos(Kx)$ $\quad\alpha,\beta,K$ costanti

$\to \bar{y}(x)=a\,\mathrm{sen}(Kx)+b\cos(Kx)$

ESEMPIO Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x)+y(x)=2\,\mathrm{sen}(2x)$.

1° passo: eq.^{ne} omogenea $y'(x)+y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t+1=0$ $t=-1$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea : $y(x)=ce^{-x}$ $(c\in\mathbb{R})$

2° passo: $f(x)=2\,\mathrm{sen}(2x)$ $\Rightarrow \bar{y}(x)=a\,\mathrm{sen}(2x)+b\cos(2x)$

dobbiamo determinare $a,b\in\mathbb{R}$ tali che la funzione $\bar{y}(x)$ sia soluzione dell'equazione, cioè $\bar{y}'(x)+\bar{y}(x)=2\,\mathrm{sen}(2x)$.

Calcolato $\bar{y}'(x)=2a\cos(2x)-2b\,\mathrm{sen}(2x)$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$2a\cos(2x)-2b\,\mathrm{sen}(2x)+a\,\mathrm{sen}(2x)+b\cos(2x)=2\,\mathrm{sen}(2x),$$

cioè

$$(a-2b)\,\mathrm{sen}(2x)+(2a+b)\cos(2x)=2\,\mathrm{sen}(2x).$$

Otteniamo allora il sistema

$\begin{cases}a-2b=2\\ 2a+b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a+4a=2\\ b=-2a\end{cases}$ $\begin{cases}a=2/5\\ b=-4/5\end{cases}$ e la soluzione particolare è $\bar{y}(x)=\frac{2}{5}\operatorname{sen}(2x)-\frac{4}{5}\cos(2x)$.

Concludendo tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$y(x)=ce^{-x}+\frac{2}{5}\operatorname{sen}(2x)-\frac{4}{5}\cos(2x) \qquad (c\in\mathbb{R}).$$

- $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ che rientrano ciascuna in uno dei casi precedenti

$\rightarrow \bar{Y}(x)=\bar{Y}_1(x)+\bar{Y}_2(x)$ dove $\bar{Y}_1(x)$ è una sol.^{ne} di $Y'+aY=f_1(x)$
e $\bar{Y}_2(x)$ è una sol.^{ne} di $Y'+aY=f_2(x)$.

- PROBLEMA di CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x)+ay(x)=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Si deve trovare l'<u>UNICA</u> soluzione $Y(x)$ dell'equazione differenziale $y'+ay=f(x)$ che verifica la condizione $y(x_0)=y_0$, cioè <u>che passa per il punto (x_0,y_0)</u>

ESEMPIO Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x)-\frac{1}{2}Y(x)=-x+\frac{5}{2}\cos x \\ Y(0)=1 \end{cases}$$

<u>1° passo</u>: eq.^{ne} omogenea $Y'(x)-\frac{1}{2}Y(x)=0$ eq.^{ne} caratt. $t-\frac{1}{2}=0$
$t=\frac{1}{2}$ sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=ce^{\frac{x}{2}}$ $(c\in\mathbb{R})$

<u>2° passo</u>: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ dove $f_1(x)=-x$, $f_2(x)=\frac{5}{2}\cos x$

Cerco $\bar{y}_1(x)$ sol.^{ne} di $y'(x)-\frac{1}{2}y(x)=-x$

$f_1(x)=-x \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_1(x)=ax+b$

dobbiamo determinare $a,b\in\mathbb{R}$ tali che $\bar{Y}_1'(x)-\frac{1}{2}\bar{Y}_1(x)=-x$.

Calcolato $\bar{Y}_1'(x)=a$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$2^{\dots} - 2\,0 = -x$, cioè $-2^{\dots} \dots 2^{\dots}$

Allora $\begin{cases} -\frac{1}{2}a = -1 \\ a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$, cioè $\bar{y}_1(x) = 2x + 4$.

Cerco $\bar{y}_2(x)$ sol.^{ne} di $y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = \frac{5}{2}\cos x$

$f_2(x) = \frac{5}{2}\cos x \Rightarrow \bar{y}_2(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x$

dobbiamo determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\bar{y}_2'(x) - \frac{1}{2}\bar{y}_2(x) = \frac{5}{2}\cos x$.

Calcolato $\bar{y}_2'(x) = a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}b\cos x = \frac{5}{2}\cos x,$$

cioè

$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)\cos x - \left(b + \frac{1}{2}a\right)\mathrm{sen}\,x = \frac{5}{2}\cos x.$$

Allora $\begin{cases} a - \frac{1}{2}b = \frac{5}{2} \\ -\left(b + \frac{1}{2}a\right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5}{4}a = \frac{5}{2} \\ b = -a/2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$,

e dunque $\bar{y}_2(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$.

La soluzione particolare è allora $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) =$

$= 2x + 4 + 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$ e tutte le soluzioni dell'equazione

$y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = -x + \frac{5}{2}\cos x$ sono date da

$$y(x) = c\,e^{x/2} + 2x + 4 + 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

3° passo: Dobbiamo determinare quale delle soluzioni dell'equazione verifichi anche la condizione $y(0) = 1$, cioè stabilire per quale $c \in \mathbb{R}$ la soluzione passa per il punto $(0,1)$:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c\,e^0 + 2\cdot 0 + 4 + 2\,\mathrm{sen}\,0 - \cos 0 = c + 3 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c + 3 = 1$$

$$\boxed{c = -2}$$

La soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = -2e^{x/2} + 2x + 4 + 2\,\text{sen}x - \cos x .$$

- CASO PARTICOLARE : $y'(x) = f(x)$ (nell'eq.ne non compare $y(x)$)

Le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le primitive della funzione $f(x)$, dunque per risolvere l'eq.ne basta calcolare l'integrale indefinito di $f(x)$:

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$ (sono infinite soluzioni che differiscono per una costante arbitraria)

ESEMPI * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = \text{sen}x$.

Le soluzioni sono date da

$$y(x) = \int \text{sen}x\,dx = -\cos x + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = xe^x$.

Integrando per parti si ottiene

$$\int xe^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c , \qquad (c \in \mathbb{R})$$

quindi tutte le soluzioni sono date da

$$y(x) = e^x(x-1) + c \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

EQ.ni DIFFERENZIALI LINEARI del 1° ordine a coefficienti costanti – ESERCIZI

1) $y'(x) = x \cdot e^{-x}$

2) $y'(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^{x}$

3) $\begin{cases} y'(x) = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'(x) = x(x-2)(x-3) \\ y(1) = 2 \end{cases}$

5) $y'(x) - y(x) = \frac{1}{2} e^{x}$

6) $y'(x) + y(x) = 3x + 2$

7) $y'(x) + 2y(x) = \operatorname{sen}(2x)$

8) $y'(x) - 2y(x) = 3e^{2x}$

9) $y'(x) + 4y(x) = -x^2 + 4x$

10) $y'(x) - 3y(x) = -\cos x$

11) $y'(x) + 3y(x) = x^3 - 3x$

12) $y'(x) - y(x) = \operatorname{sen} x$

13) $\begin{cases} y'(x) = y(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} y'(x) - y(x) = 1 + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

15) $y'(x) - 2y(x) = x$

16) $y'(x) = -y(x) + e^{2x}$

17) $y'(x) - y(x) = x^3$

18) $y'(x) + 2y(x) = 2e^{-x}$

19) $y'(x) = 2y(x) + 3\cos x$

20) $y'(x) + 3y(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)$

21) $y'(x) - 3y(x) = \operatorname{sen}(3x) - \cos x$

22) $y'(x) - 3y(x) = x^2 + 5$

23) $y'(x) = -\frac{2}{3} y(x) + 3e^{2x}$

24) $y'(x) + y(x) = 3e^{-x}$

25) $y'(x) = -\frac{3}{2} y(x) + 2\operatorname{sen} x$

26) $y'(x) - y(x) = e^{-3x}$

27) $y'(x) + 2y(x) = -x^2 + 3$

28) $y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}$

29) $y'(x) + 4y(x) = 2\cos(2x)$

30) $y'(x) + y(x) = 2x^2$

Libro di Esercizi di Analisi AB
ES. 5.2.1, ES. 5.2.2 (a), ES. 5.79,
ES. 5.80 (a, c, d)

1) $y(x) = -(x+1)e^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R}$ 2) $y(x) = \frac{1}{2}e^{x}(\operatorname{sen}x - \cos x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

3) $y(x) = 2\operatorname{sen}x - x\cos x + 1$ 4) $y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{5}{12}$

5) $y(x) = ce^{x} + \frac{1}{2}xe^{x} \quad c \in \mathbb{R}$ 6) $y(x) = ce^{-x} + 3x - 1 \quad c \in \mathbb{R}$

7) $y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) \quad c \in \mathbb{R}$ 8) $y(x) = ce^{2x} + 3xe^{2x} \quad c \in \mathbb{R}$

9) $y(x) = ce^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{8}x - \frac{9}{32} \quad c \in \mathbb{R}$ 10) $y(x) = ce^{3x} - \frac{1}{10}\operatorname{sen}x + \frac{3}{10}\cos x \quad c \in \mathbb{R}$

11) $y(x) = ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{7}{27} \quad c \in \mathbb{R}$

12) $y(x) = ce^{x} - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x) \quad c \in \mathbb{R}$ 13) $y(x) = e^{x} - (x+1)$

14) $y(x) = \frac{5}{2}e^{x} - 1 - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x)$ 15) $y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad c \in \mathbb{R}$

16) $y(x) = ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \quad c \in \mathbb{R}$ 17) $y(x) = ce^{x} - x^3 - 3x^2 - 6x - 6 \quad c \in \mathbb{R}$

18) $y(x) = ce^{-2x} + 2e^{-x} \quad c \in \mathbb{R}$ 19) $y(x) = ce^{2x} + \frac{3}{5}\operatorname{sen}x - \frac{6}{5}\cos x \quad c \in \mathbb{R}$

20) $y(x) = ce^{-3x} + \frac{5}{13}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{13}\cos(2x) \quad c \in \mathbb{R}$

21) $y(x) = ce^{3x} - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}x + \frac{3}{10}\cos x \quad (c \in \mathbb{R})$

22) $y(x) = ce^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{47}{27} \quad c \in \mathbb{R}$ 23) $y(x) = ce^{-\frac{2x}{3}} + \frac{9}{8}e^{2x} \quad (c \in \mathbb{R})$

24) $y(x) = ce^{-x} + 3xe^{-x} \quad c \in \mathbb{R}$ 25) $y(x) = ce^{-\frac{3x}{2}} + \frac{12}{13}\operatorname{sen}x - \frac{8}{13}\cos x \quad (c \in \mathbb{R})$

26) $y(x) = ce^{x} - \frac{1}{4}e^{-3x} \quad c \in \mathbb{R}$ 27) $y(x) = ce^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \quad c \in \mathbb{R}$

28) $y(x) = ce^{-3x} + xe^{-3x} \quad c \in \mathbb{R}$

29) $y(x) = ce^{-4x} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x) \quad c \in \mathbb{R}$

30) $y(x) = ce^{-x} + 2x^2 - 4x + 4 \quad c \in \mathbb{R}$

EQ.^{NI} DIFFERENZIALI LINEARI del 1° ordine a coefficienti variabili - ESERCIZI

1) $y'(x) + \operatorname{sen} x \, y(x) = \operatorname{sen} x$ SOL.^{NE} $y(x) = c e^{\cos x} + 1 \quad (c \in \mathbb{R})$

2) $\begin{cases} y'(x) - \operatorname{sen} x \cdot y(x) = 0 \\ y(\pi) = 3 \end{cases}$ $y(x) = \frac{3}{e} e^{-\cos x} = 3 e^{-1-\cos x}$

3) $y'(x) + \operatorname{sen} x \, y(x) = \operatorname{sen}(2x)$ $y(x) = c e^{\cos x} + 2(\cos x + 1) \quad (c \in \mathbb{R})$

4) $\begin{cases} y'(x) - x y(x) = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $y(x) = 2\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right)$

5) $\begin{cases} y'(x) = x y(x) + x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $y(x) = \frac{3}{\sqrt{e}} e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2) = 3 e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}} - (x^2+2)$

6) $y'(x) - 2x y(x) = 2x e^{2x^2}$ $y(x) = c e^{x^2} + e^{2x^2} \quad (c \in \mathbb{R})$

Libro di Esercizi di Analisi AB

Es. 5.2.2 (escluso a)

3) EQ.NI DIFFERENZIALI LINEARI del 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x) \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

Equazione omogenea : $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$

Equazione completa : $y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x)$

- EQ.NE OMOGENEA $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$

Si considera l'<u>equazione caratteristica</u> $\boxed{t^2+at+b=0}$ che si ottiene sostituendo a $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ la variabile t elevata al grado della derivata corrispondente ($y''\leftrightarrow t^2$, $y'\leftrightarrow t^1=t$, $y\leftrightarrow t^0=1$). La formula risolutiva dell'equazione caratteristica è data da

$$t=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Allora due soluzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dell'equazione omogenea, dette SOLUZIONI FONDAMENTALI, sono date da

→ $y_1(x)=e^{t_1x}$, $y_2(x)=e^{t_2x}$ se l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali e distinte t_1 e t_2

→ $y_1(x)=e^{t_1x}$, $y_2(x)=xe^{t_1x}$ se l'equazione caratteristica ammette una sola soluzione reale t_1 con moltepeicità 2

→ $y_1(x)=e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$, $y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ se l'equazione caratteristica non ammette radici reali, ma una coppia di RADICI COMPLESSE CONIUGATE $t=\alpha\pm i\beta$.

Si può dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono con

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

ESEMPI. * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+y'(x)-6y(x)=0$

Consideriamo l'equazione caratteristica $t^2+t-6=0$ che ammette 2 soluzioni reali e distinte $t_1=2$, $t_2=-3$ $\left(t=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\right)$. Allora le due soluzioni fondamentali sono $y_1(x)=e^{2x}$, $y_2(x)=e^{-3x}$ e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono con

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+4y'(x)+4y(x)=0$

L'equazione caratteristica $t^2+4t+4=0$ ammette una sola soluzione $t_1=-2$ con molteplicità 2 (infatti $t^2+4t+4=(t+2)^2$). Allora le due soluzioni fondamentali sono $y_1(x)=e^{-2x}$, $y_2(x)=xe^{-2x}$ e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono con

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$.

L'equazione caratteristica $t^2 - 2t + 5 = 0$ non ha soluzioni reali e la formula risolutiva fornisce

$t = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Allora $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e le due soluzioni fondamentali sono $y_1(x) = e^x \operatorname{sen}(2x)$, $y_2(x) = e^x \cos(2x)$. Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono con

$$y(x) = c_1 e^x \operatorname{sen}(2x) + c_2 e^x \cos(2x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- EQUAZIONE COMPLETA $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

<u>1° passo</u>: Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata $(y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

<u>2° passo</u>: trovare una soluzione $\bar{y}(x)$ dell'equazione completa (detta SOLUZIONE PARTICOLARE)

Allora tutte le soluzioni dell'equazione $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ si ottengono sommando le soluzioni dell'equazione omogenea con la soluzione particolare

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

Come si trova la soluzione particolare $\bar{y}(x)$:

Ci sono vari casi a seconda della funzione $f(x)$ che compare a 2° membro.

- $f(x) = P_m(x) =$ polinomio di grado m

→ $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado m se nell'equazione compare $y(x)$ (cioè $b \neq 0$)

→ $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado $(m+1)$ se nell'equazione non compare $y(x)$, ma compare $y'(x)$ $(b=0, a\neq 0)$

→ $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado $(m+2)$ se nell'equazione non compaiono né $y(x)$ né $y'(x)$ $(a=b=0)$.

ESEMPI. * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 4x^2+3x$.

1° passo: eq.^{ne} omogenea $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 0$

eq.^{ne} caratteristica $t^2 - 3t - 4 = 0$ $\quad t_1 = -1, t_2 = 4$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2° passo: $f(x) = 4x^2+3x \Rightarrow \bar{y}(x) = ax^2+bx+c$

dobbiamo determinare per quali valori di a,b,c la funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione, cioè $\bar{y}''(x) - 3\bar{y}'(x) - 4\bar{y}(x) = 4x^2+3x$

Calcolati $\bar{y}'(x) = 2ax+b$, $\bar{y}''(x) = 2a$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$\underbrace{2a}_{\bar{y}''} \underbrace{-3(2ax+b)}_{-3\,\bar{y}'(x)} \underbrace{-4(ax^2+bx+c)}_{-4\,\bar{y}(x)} = 4x^2+3x,$$

cioè $\quad -4ax + (-6a-4b)x + 2a-3b-4c = 4x^2+3x.$ $\quad$ EQ.^{ni} I

Eguagliando i coefficienti otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -4a=4 \\ -6a-4b=3 \\ 2a-3b-4c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ -4b=-3 \\ -2-3b-4c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{3}{4} \\ c=-\frac{17}{16} \end{cases}$$

e la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = -x^2+\frac{3}{4}x-\frac{17}{16}$.

Concludendo tutte le soluzioni dell'equazione assegnata $y''(x)-3y'(x)-4y(x)=4x^2+3x$ sono date da

$$y(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{4x}-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{17}{16} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenzial.

$$y''(x)-y'(x)=x^2$$

<u>1° passo</u>: eq.^{ne} omogenea $y''(x)-y'(x)=0$

eq.^{ne} caratteristica $t^2-t=0 \qquad t_1=0, t_2=1$

$t(t-1)=0$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea: $y(x) = c_1+c_2e^x \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

(le sol.^{ni} fondamentali sono $y_1(x)\equiv 1$, $y_2(x)=e^x$)

<u>2° passo</u>: $f(x)=x^2$ ($y(x)$ non compare) $\Rightarrow \bar{y}(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

dobbiamo determinare per quali valori di a,b,c,d la funzione $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'eq.^{ne}, cioè $\bar{y}''(x)-\bar{y}'(x)=x^2$.

Calcolati $\bar{y}'(x) = 3ax^2+2bx+c$, $\bar{y}''(x) = 6ax+2b$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$6ax+2b-(3ax^2+2bx+c)=x^2$, $\quad$ cioè

$-3ax^2+(6a-2b)x+2b-c=x^2$.

uguagliando i coefficienti otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -3a=1 \\ 6a-2b=0 \\ 2b-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=3a \\ c=2b \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

e la soluzione particolare è $\bar{y}(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2-2x$.

Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(x)=c_1+c_2e^x-\frac{1}{3}x^3-x^2-2x \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

- $f(x)=$ costante $\cdot\, e^{\alpha x}$

→ $\bar{y}(x)=K\cdot e^{\alpha x}$ se α non è soluzione dell'equazione caratteristica

→ $\bar{y}(x)=Kxe^{\alpha x}$ se α è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 1.

→ $\bar{y}(x)=Kx^2e^{\alpha x}$ se α è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 2

ESEMPI * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+y'(x)-2y(x)=e^{3x}$

<u>1° passo</u>: eq.^{ne} omogenea $y''(x)+y'(x)-2y(x)=0$

eq.^{ne} caratteristica $t^2+t-2=0$ $t_1=1, t_2=-2$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$

<u>2° passo</u>: $f(x)=e^{3x}$ $\alpha=3$ non è soluzione dell'eq.^{ne} caratt.

$\Rightarrow$ $\bar{y}(x)=Ke^{3x}$.

Calcolati $\bar{y}'(x)=3Ke^{3x}$, $\bar{y}''(x)=9Ke^{3x}$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$9Ke^{3x} + 3Ke^{3x} - 2ke^{3x} = e^{3x}$, cioe

$$10Ke^{3x} = e^{3x}, \quad 10K = 1, \quad K = \frac{1}{10}.$$

Allora la soluzione $\bar{y}(x) = \frac{1}{10}e^{3x}$ e tutte le soluzioni dell' equazione assegnata sono date da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}e^{3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le sol.^{ni} dell' equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 2e^{-2x}.$$

1° passo: sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
(es. precedente)

2° passo : $f(x) = 2e^{-2x}$ $\alpha = -2$ è soluzione dell' equazione caratteristica con molteplicità 1

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = Kxe^{-2x}.$$

Calcolati $\bar{y}'(x) = Ke^{-2x} - 2Kxe^{-2x}$, $\bar{y}''(x) = -2Ke^{-2x} - 2ke^{-2x} + 4Kxe^{-2x}$, sostituiamo nell' equazione ottenendo

$$-2ke^{-2x} - 2ke^{-2x} + 4\cancel{kx}e^{-2x} + ke^{-2x} - 2\cancel{kx}e^{-2x} - 2k\cancel{x}e^{-2x} = 2e^{-2x},$$

cioè $-3ke^{-2x} = 2e^{-2x}$, $-3k = 2$, $k = -\frac{2}{3}$.

Allora la soluzione particolare $\bar{y}(x) = -\frac{2}{3}xe^{-2x}$ e tutte le soluzioni dell' equazione sono date da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{2}{3}xe^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell' equazione differenziale $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 5e^x$.

1° passo : equazione omogenea $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$
equaz. caratteristica $t^2 - 2t + 1 = 0$ $(t-1)^2 = 0$

sol.^{ni} equazione omog: $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2° passo: $f(x) = 5e^x$ $\alpha = 1$ è sol.^{ne} dell'equazione caratteristica con molteplicità 2 $\Rightarrow \bar{y}(x) = Kx^2e^x$.

Calcolati $\bar{y}'(x) = 2Kxe^x + Kx^2e^x$, $\bar{y}''(x) = 2Ke^x + 2Kxe^x + 2Kxe^x + Kx^2e^x$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$2Ke^x + \cancel{4Kxe^x} + \cancel{Kx^2e^x} - \cancel{4Kxe^x} - \cancel{2Kx^2e^x} + \cancel{Kx^2e^x} = 5e^x,$$

$$2Ke^x = 5e^x, \quad K = \frac{5}{2}.$$

Allora la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = \frac{5}{2}x^2e^x$ e tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{5}{2}x^2e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ $\quad P_m(x)$ = polinomio di grado m

$\rightarrow \bar{y}(x) = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ se α non è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt.

$\rightarrow \bar{y}(x) = x \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ se α è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt. con molt. 1

$\rightarrow \bar{y}(x) = x^2 \cdot Q_m(x) e^{\alpha x}$ se α è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt. con molt. 2

$Q_m(x)$ è un polinomio di grado m

ESEMPIO. Determinate tutte le soluzioni dell'eq.^{ne} diff.

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5xe^{2x}$$

1° passo: eq.^{ne} omog. $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$ eq.^{ne} caratt. $t^2 + t - 6 = 0$

$t_1 = 2$, $t_2 = -3$ sol.^{ni} $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2° passo: $f(x) = 5xe^{2x}$ $\alpha = 2$ è sol.^{ne} dell'eq.^{ne} caratt. con molt. 1

$\Rightarrow \bar{y}(x) = x(ax+b)e^{2x} = (ax^2+bx)e^{2x}$. Calcolati

$\bar{y}'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx)e^{2x}$, $\bar{y}''(x) = 2ae^{2x} + 4(2ax+b)e^{2x} + 4(ax^2+bx)e^{2x}$,

sostituiamo nell' eq.ne ottenendo

$$2ae^{2x} + 4(2ax+b)e^{2x} + \cancel{4(ax^2+bx)}e^{2x} + (2ax+b)e^{2x} + 2\cancel{(ax^2+bx)}e^{2x} - 6\cancel{(ax^2+bx)}e^{2x} = 5xe^{2x}$$

$$2a\cancel{e^{2x}} + 5(2ax+b)\cancel{e^{2x}} = 5x\cancel{e^{2x}}$$

$10ax + 2a + 5b = 5x$.

Siamo ricondotti al sistema

$$\begin{cases} 10a = 5 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$ da cui deduciamo che

la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x)e^{2x}$ e tutte le sol.ni dell' eq.ne iniziale sono date da

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x\right)e^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- $f(x) = \alpha\, sen(kx) + \beta \cos(kx)$ $\qquad \alpha, \beta, k$ costanti

→ $\bar{y}(x) = a\, sen(kx) + b\cos(kx)$ se le due funzioni $sen(kx)$ e $\cos(kx)$ non sono le soluzioni fondamentali dell' equazione omogenea

→ $\bar{y}(x) = x(a\, sen(kx) + b\cos(kx))$ se le due funzioni $y_1(x) = sen(kx)$, $y_2(x) = \cos(kx)$ sono le soluzioni fondamentali dell' equazione omogenea

ESEMPI. * Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = sen(2x)$.

<u>1° passo</u>: eq.ne omogenea $\quad y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$

eq.ne caratt. $\quad t^2 + t - 6 = 0 \quad t_1 = 2,\ t_2 = -3$

sol. dell'equazione omog.: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

<u>2° passo:</u> $f(x) = \text{sen}(2x)$ le 2 funzioni $\text{sen}(2x)$ e $\cos(2x)$ non sono le soluzioni fondamentali dell'eq.^{ne} omogenea (infatti $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$) $\Rightarrow \bar{y}(x) = a\,\text{sen}(2x) + b\cos(2x)$.

Calcolati $\bar{y}'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\,\text{sen}(2x)$, $\bar{y}''(x) = -4a\,\text{sen}(2x) - 4b\cos(2x)$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$-4a\,\text{sen}(2x) - 4b\cos(2x) + 2a\cos(2x) - 2b\,\text{sen}(2x)$$
$$-6a\,\text{sen}(2x) - 6b\cos(2x) = \text{sen}(2x),$$

cioè

$$(-10a - 2b)\,\text{sen}(2x) + (-10b + 2a)\cos(2x) = \text{sen}(2x).$$

Otteniamo allora il sistema

$$\begin{cases} -10a - 2b = 1 \\ -10b + 2a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -52b = 1 \\ a = 5b \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{5}{52} \\ b = -\frac{1}{52} \end{cases}$$

e la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = -\frac{5}{52}\,\text{sen}(2x) - \frac{1}{52}\cos(2x)$.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{5}{52}\,\text{sen}(2x) - \frac{1}{52}\cos(2x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2\cos x.$$

<u>1° passo:</u> eq.^{ne} omogenea $y''(x) + y(x) = 0$

eq.^{ne} caratteristica $t^2 + 1 = 0$ nessuna sol.^{ne} reale

$t = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ $\quad \alpha = 0$ e $\beta = 1$

sol.^{ni} dell'eq.^{ne} omogenea

$$y(x) = c_1\,\text{sen}x + c_2\cos x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

2° passo: $f(x) = 2\cos x$ — le funzioni $y_1(x) = \operatorname{sen} x$, $y_2(x) = \cos x$ sono le soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea

$\Rightarrow \bar{y}(x) = x(a \operatorname{sen} x + b\cos x)$.

Calcolati $\bar{y}'(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x + x(a\cos x - b \operatorname{sen} x)$,

$\bar{y}''(x) = a\cos x - b\operatorname{sen} x + a\cos x - b\operatorname{sen} x + x(-a\operatorname{sen} x - b\cos x)$

sostituiamo nell'equazione ottenendo

$2a\cos x - 2b\operatorname{sen} x + x(-a\cancel{\operatorname{sen} x} - b\cos x) + x(a\cancel{\operatorname{sen} x} + b\cos x) = 2\cos x$

cioè $\quad 2a\cos x - 2b\operatorname{sen} x = 2\cos x$.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

e la soluzione particolare è

$\bar{y}(x) = x \operatorname{sen} x$.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ che rientrano ciascuna in uno dei casi precedenti

$\rightarrow \bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ dove $\bar{y}_1(x)$ è una sol.^{ne} di $y'' + ay' + by = f_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ è una sol.^{ne} di $y'' + ay' + by = f_2(x)$.

- PROBLEMA di CAUCHY

$$\begin{cases} y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}$$

Si deve trovare l'UNICA soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x)$ che verifica entrambe le condizioni $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0)=y_1$ (cioè che passa per il punto (x_0,y_0) con derivata y_1).

ESEMPIO. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+\frac{1}{2}y'(x)-\frac{1}{2}y(x)=-x+5\,\text{sen}(3x) \\ y(0)=2 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

<u>1° passo</u>: eq.^{ne} omogenea $y''(x)+\frac{1}{2}y'(x)-\frac{1}{2}y(x)=0$

eq.^{ne} caratt. $t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0$ $\quad t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}$

sol.^{ni} eq.^{ne} omogenea $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

<u>2° passo</u>: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ dove $f_1(x)=-x$, $f_2(x)=5\,\text{sen}(3x)$.

Cerco $\bar{y}_1(x)$ soluzione di $y''(x)+\frac{1}{2}y'(x)-\frac{1}{2}y(x)=-x$

$f_1(x)=-x \Rightarrow \bar{y}_1(x)=ax+b$

Calcolati $\bar{y}_1'(x)=a$, $\bar{y}_1''(x)=0$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}b=-x \text{, cioè}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a=-1 \\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

Allora $\bar{y}_1(x)=2x+2$.

Cerco $\bar{y}_2(x)$ soluzione di $y''(x)+\frac{1}{2}y'(x)-\frac{1}{2}y(x)=5\,\text{sen}(3x)$

$f_2(x)=5\,\text{sen}(3x) \Rightarrow \bar{y}_2(x)=a\,\text{sen}(3x)+b\cos(3x)$.

$\bar{y}_2''(x) = -9a\,\text{sen}(3x) - 9b\cos(3x)$, sostituiamo nell'equazione ottenendo

$$-9a\,\text{sen}(3x) - 9b\cos(3x) + \frac{3}{2}a\cos(3x) - \frac{3}{2}b\,\text{sen}(3x)$$
$$-\frac{a}{2}\text{sen}(3x) - \frac{b}{2}\cos(3x) = 5\,\text{sen}(3x),$$

cioè
$$\left(-9a - \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}\right)\text{sen}(3x) + \left(-9b + \frac{3}{2}a - \frac{b}{2}\right)\cos(3x) = 5\,\text{sen}(3x).$$

Allora
$$\begin{cases} -9a - \frac{3}{2}b - \frac{a}{2} = 5 \\ -9b + \frac{3}{2}a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{361}{6}b - \frac{3}{2}b = 5 \\ a = \frac{19}{3}b \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{19}{37} \\ b = -\frac{3}{37} \end{cases}$$

e la soluzione $\bar{y}_2(x) = -\frac{19}{37}\text{sen}(3x) - \frac{3}{37}\cos(3x)$.

La soluzione particolare è allora $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) =$
$= 2x + 2 - \frac{19}{37}\text{sen}(3x) - \frac{3}{37}\cos(3x)$ e tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} + 2x + 2 - \frac{19}{37}\text{sen}(3x) - \frac{3}{37}\cos(3x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

<u>3° passo</u>: dobbiamo stabilire per quali $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la soluzione verifica le due condizioni del problema di Cauchy $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

$$y(0) = c_1 + c_2 + 2 - \frac{3}{37}$$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}c_2 e^{x/2} + 2 - \frac{57}{37}\cos(3x) + \frac{9}{37}\text{sen}(3x)$$

$$y'(0) = -c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 2 - \frac{57}{37}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2 - \frac{3}{37} = 2 \\ -c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 2 - \frac{57}{37} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{37} \\ -c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{57}{37} \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = -c_1 + \frac{3}{37} \\ -\frac{3}{2}c_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left\{ c_1 = -1,\ c_2 = \frac{40}{37}. \right.$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy è
$$y(x) = -e^{-x} + \frac{40}{37}e^{x/2} + 2x + 2 - \frac{19}{37}\text{sen}(3x) - \frac{3}{37}\cos(3x).$$

$y''(x) = f(x)$ (nell' equazione non compaiono $y'(x)$ e $y(x)$).

Se $y(x)$ è sol.^{ne} dell' equazione, allora $y'(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ e l' equazione si riconduce a

$$y'(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c_1$$ (con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ e $c_1 \in \mathbb{R}$).

Allora le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(x) = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(sono infinite funzioni al variare di 2 costanti arbitrarie).

ESEMPI. * Determinate tutte le soluzioni dell' equazione differenziale $y''(x) = \operatorname{sen} x$.

L' equazione si riconduce a $y'(x) = \int \operatorname{sen} x\,dx$, cioè

$y'(x) = -\cos x + c_1$. Allora le soluzioni si ottengono con

$$y(x) = \int (-\cos x + c_1)\,dx = -\operatorname{sen} x + c_1 x + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

* Determinate tutte le soluzioni dell' equazione differenziale $y''(x) = x \cdot e^x$.

L'equazione si riconduce a $y'(x) = \int x e^x\,dx$ (è a pag. 8), cioè

$y'(x) = e^x(x-1) + c_1$. Allora le soluzioni si ottengono con

$$y(x) = \int (e^x(x-1) + c_1)\,dx = e^x(x-1) - e^x + c_1 x + c_2,$$

cioè $y(x) = e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

2) $y'' + 3y' + 10y = 0$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

4) $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

5) $y'' - 2y' + 17y = 0$

6) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

7) $\begin{cases} y'' + \frac{1}{2}y' - 3y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

8) $y'' + 3y' + \frac{13}{4}y = 0$

9) $y'' + 3y' - 10y = x^2$

10) $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}x + 1$

11) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$

12) $\begin{cases} y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}x + 1 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

13) $y'' + y' - 2y + 1 = 2\,\mathrm{sen}\,x$

14) $y'' + 2y' + 5y = 3x^2 - 1$

13bis) $y'' + y' - 2y = 2x^3 - 5x^2$

15) $y'' + y' + 5y = \mathrm{sen}\,x$

16) $y'' + 4y' = e^x + e^{-x}$

17) $y'' + 5y = e^x$

18) $y'' + 9y = e^x + \mathrm{sen}(3x)$

19) $y'' + 4y' + 5y = 1$

20) $y'' - 10y' + 9y = 0$

21) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 1 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

24) $y'' - 2y' + 2y = 1$

25) $y'' + y = x$

26) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{sen}\,x + \cos x$

27) $y'' - y' - 2y = x^2 + 1$

28) $y'' - y' = xe^x$

29) $y'' - 4y' = 2\cos x$

30) $y'' + y' - 2y = e^x + 1$

31) $y'' + y' + 2y = e^{x}(x^2+1)$

32) $y'' + 3y' + 2y = 4\cos x - 2\operatorname{sen} x$

33) $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$

34) $y'' + y = x^2 + 2e^{x}$

35) $y'' + y' - 2y = e^{x} + 1$

36) $y'' + 4y = 3\cos 2x$

37) $y'' + y' - 12y = 2e^{3x}$

38) $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$

39) $y'' + 6y' + 9y = 3xe^{-3x}$

40) $y'' + \frac{1}{4}y = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

41) $y'' + \frac{1}{4}y = 2\cos\frac{x}{2}$

42) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{x} + 1 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = \frac{22}{3} \end{cases}$ (ES. 35)

43) $y'' = e^{-x}$

44) $y'' = 3x(x-1)$

45) $y'' = x\operatorname{sen} x$

46) $\begin{cases} y'' = \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$

Libro di Esercizi di Analisi AB
ES. 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3, 5.82, 5.83, 5.84

SOL. N.° 1 (pag. 32)

1) $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{31}}{2} x + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{31}}{2} x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ 4) $y(x) = e^{-x} + e^{3x}$

5) $y(x) = c_1 e^{x} \operatorname{sen} 4x + c_2 e^{x} \cos 4x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 6) $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

7) $y(x) = -e^{-2x}$ 8) $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

9) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{50}x - \frac{19}{500} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

10) $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{x} - x - 1 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

11) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 12) $y(x) = 2e^{x} - x - 1$

13) * $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \operatorname{sen} x - \frac{1}{5} \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

14) $y(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen} 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x + \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{25}x - \frac{31}{125}$

15) $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{19}}{2} x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + \frac{4}{17} \operatorname{sen} x - \frac{1}{17} \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

16) $y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{5} e^{x} - \frac{1}{3} e^{-x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

17) $y(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{5} x + c_2 \cos \sqrt{5} x + \frac{1}{6} e^{x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

18) $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + \frac{1}{10} e^{x} - \frac{1}{6} x \cos 3x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

19) $y(x) = c_1 e^{-2x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-2x} \cos x + \frac{1}{5} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

20) $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{9x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

21) $y(x) = -2e^{x} + x e^{x} + x + 2$ * 13^bis) $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - x^3 + x^2 - 2x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

22) $y(x) = -\frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4}$

23) $y(x) = \frac{25}{27} e^{3x} - \frac{79}{27} x e^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{2}{27}$

24) $y(x) = c_1 e^{x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{x} \cos x + \frac{1}{2} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

25) $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

26) $y(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-x} \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x - \frac{1}{5} \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

27) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

28) $y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

29) $y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{8}{17} \operatorname{sen} x - \frac{2}{17} \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

30) $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} x e^{x} - \frac{1}{2} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

31) $y(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt7}{2}x+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt7}{2}x+\left(\frac14x^2-\frac38x+\frac{13}{32}\right)e^x \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

32) $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\mathrm{sen}\,x+\cos x \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

33) $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+x^2+4x+7 \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

34) $y(x)=c_1\,\mathrm{sen}\,x+c_2\cos x+x^2-2+e^x \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

35) $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac12+\frac13xe^x \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

36) $y(x)=c_1\,\mathrm{sen}(2x)+c_2\cos(2x)+\frac34x\,\mathrm{sen}(2x) \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

37) $y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}+\frac27xe^{3x} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

38) $y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+x^2e^{3x} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

39) $y(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}+\frac12x^3e^{-3x} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

40) $y(x)=c_1\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+c_2\cos\frac{x}{2}-2x\cos\frac{x}{2} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

41) $y(x)=c_1\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+c_2\cos\frac{x}{2}+2x\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

42) $y(x)=2e^x-\frac52e^{-2x}-\frac12+\frac13xe^x$

43) $y(x)=e^{-x}+c_1x+c_2 \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

44) $y(x)=\frac14x^4-\frac12x^3+c_1x+c_2 \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

45) $y(x)=-x\,\mathrm{sen}\,x-2\cos x+c_1x+c_2 \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

46) $y(x)=x\arctan x-\frac12\log(1+x^2)-x+3$

Potete risolvere anche

$y''-y=xe^x$ SOL.NE $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\left(\frac14x^2-\frac14x\right)e^x \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$